19/4/18

Αν $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία συνόλων σε ένα μ.χ. (X,ρ) με διαμ$(F_n)\to 0$, τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι είτε το κενό είτε μονοσύνολο.

Πράγματι, αν $x\neq y$ $x,y\in\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, τότε διαμ$(F_n)\geq \rho(x,y)$ $\forall n$

άτοπο! διότι διαμ$(F_n)\to 0$.

Θεώρημα (Cantor) (χαρακτηρισμός πληρότητας μ.χ.)

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) Ο (X,ρ) είναι πλήρης

ii) Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη κενών κλειστών υποσυνόλων $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με διαμ$(F_n)\to 0$ ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\neq\emptyset$

$F_{n+1}\subseteq F_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Απόδειξη: i) $\Rightarrow$ ii) Έστω (X,ρ) πλήρης μ.χ. και $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X με διαμ$(F_n)\to 0$

$F_1\supseteq F_2\supseteq F_3\supseteq \dots \supseteq F_n\supseteq F_{n+1}\dots$

Για κάθε n επιλέγουμε $x_n\in F_n$. Δείχνουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική. Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον διαμ$(F_n)\to 0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει διαμ$(F_{n_0})<\varepsilon$.

Για κάθε $n,m\geq n_0$ τότε $x_n\in F_n\subseteq F_{n_0}$

$x_m\in F_m\subseteq F_{n_0}$

Άρα $\rho(x_n,x_m)\leq$ διαμ$(F_{n_0})<\varepsilon$.

Εφόσον ο (X,ρ) είναι πλήρης μ.χ. η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα

δηλ. $\exists x\in X$ $x_n\to x$.

Θα δείξουμε ότι $x \in F_m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$

Έστω $m \in \mathbb{N}$

Τότε $x_{m+n} \subseteq F_{m+n} \subseteq F_m \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Εφόσον $x_n \to x$ και η $(x_{m+n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

έχουμε $x_{m+n} \to x$.

Εφόσον το F_m είναι κλειστό, συμπεραίνουμε ότι $x \in F_m$. Αυτό αποδείχθηκε για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άρα $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Υποθέτουμε ότι ισχύει η (i) και θα δ.ο. ο (X,ρ) είναι πλήρης. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στον (X,ρ)

Θέτουμε $F_n = \overline{\{x_m : m \geq n\}} = \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}}$

Κάθε F_n είναι μη κενό, κλειστό και $\forall n$: $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \supseteq \{x_{n+1}, x_{n+2}\}$

$\Rightarrow \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}} \supseteq \overline{\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}}$

$\Rightarrow F_n \supseteq F_{n+1}$ Άρα $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα.

Δείχνουμε ότι $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$

Έστω $\varepsilon > 0$ Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq n_0$

Άρα $\operatorname{diam}(\{x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Άρα $\operatorname{diam}(\overline{\{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots\}}) = \operatorname{diam}(\{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots\}) < \varepsilon$

$\operatorname{diam}(F_{n_0}) < \varepsilon$ και εφόσον $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα

$\operatorname{diam}(F_n) < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Από την υπόθεσή μας $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ και άρα (εφόσον $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$)

$\exists x \in X \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $\left.\begin{matrix} x_n \in F_n \\ x \in F_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \rho(x_n, x) \leq \text{διαμ}(F_n)$

και εφόσον $\text{διαμ}(F_n) \to 0$, προκύπτει $\rho(x_n, x) \to 0$

δηλ. $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Ασκήσεις Φυλλαδίου #2

1) α) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική

▸ $A = (0,1] \cup \{2,3\}$

$A^\circ = (0,1)$

$\bar{A} = [0,1] \cup \{2,3\}$

$A' = [0,1]$ $\quad (x \in A' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset)$

▸ $B = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

$B^\circ = \emptyset$, $\bar{B} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, $B' = \{0\}$

▸ $\Gamma^\circ = \emptyset$, $\bar{\Gamma} = [0,1]$, $\Gamma' = [0,1]$

▸ $\Delta = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$

$\Delta^\circ = \emptyset$, $\bar{\Delta} = \mathbb{R}$, $\Delta' = \mathbb{R}$

β) $E' = \mathbb{N}$ $\quad E = \{m + \frac{1}{2^n}, \ m, n \in \mathbb{N}\}$

1 2 3 4 5

γ) Αν $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$, $\{q_n\}$ κλειστό

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\mathbb{R} \setminus \{q_n\})}_{\text{ανοικτό}}$

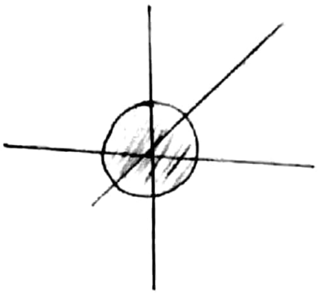
2) $A = (0,1) \times \{0\}$

$A^\circ = \emptyset, \quad \bar{A} = [0,1] \times \{0\}, \quad A' = [0,1] \times \{0\}$

$B = \{ (\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N} \} \qquad \bar{B} = B \cup \{(0,2)\} \qquad B' = \{(0,2)\}$

$B^\circ = \emptyset$

$\Gamma = \{ (x,y) \quad x^2+y^2 < 1 \} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad y = 2x \}$



$\bar{\Gamma} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1 \} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad y = 2x\}$

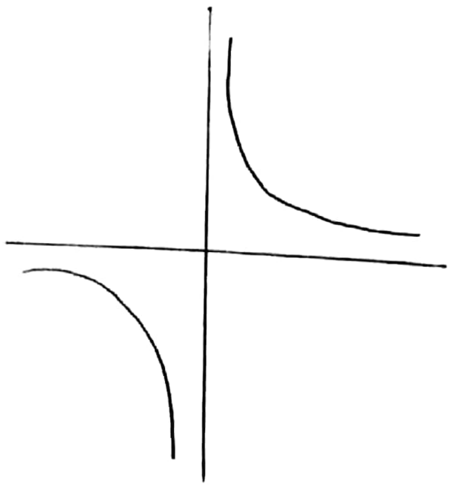
$\Gamma^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$

$\Gamma' = \bar{\Gamma}$

6) Να δ.ο. το $E' = \{(x, \frac{1}{x}), x \neq 0\}$ είναι κλειστό

Έστω $(x_n, \frac{1}{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο E και $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$(x_n, \frac{1}{x_n}) \to (x,y)$



$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ \frac{1}{x_n} \to y \end{array}\right\}$

$\Rightarrow x_n \cdot \frac{1}{x_n} \to xy$

$\Rightarrow 1 \to xy$

$\Rightarrow xy = 1$

$\Rightarrow y = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow (x,y) \in E$

3) (X,ρ) μ.χ.

$A \subseteq X$

U ανοικτό $U \cap \bar{A} \neq \emptyset$

Να δ.ο. $U \cap A \neq \emptyset$

Απόδειξη: $U \cap \bar{A} \neq \emptyset \Rightarrow$ Υπάρχει $x \in U \cap \bar{A}$

$\left.\begin{array}{l} x \in U \\ U \text{ ανοικτό} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq U$

Εφόσον $x \in \bar{A}$ $\quad B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Αν $y \in B_\rho(x,\varepsilon) \cap A$

Τότε $\left.\begin{array}{l} y \in A \\ \text{και } y \in U \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap U \neq \emptyset$

4) (X,ρ) μ.χ. $\quad G \subseteq X$

Τ.Α.Ε.Ι: i) Το G είναι ανοικτό

ii) $\forall A \subseteq X$, $\quad G \cap \bar{A} \subseteq \overline{G \cap A}$

iii) $\forall A \subseteq X$ $\quad \overline{G \cap \bar{A}} = \overline{G \cap A}$

Απόδειξη: i) $\Rightarrow$ ii) Έστω G ανοικτό και $A \subseteq X$ και $x \in G \cap \bar{A}$

Θα δ.ο. $x \in \overline{G \cap A}$

Έστω U ανοικτό με $x \in U$

Εφόσον $x \in G$ έχουμε $x \in U \cap G$ και $U \cap G$ ανοικτό ως τομή

Εφόσον $x \in \bar{A}$ συμπεραίνουμε ότι $(U \cap G) \cap A \neq \emptyset$ δηλ. $U \cap (G \cap A) \neq \emptyset$

Συνεπώς $x \in \overline{G \cap A}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Εφόσον $G \cap \bar{A} \subseteq \overline{G \cap A}$ προκύπτει $\overline{G \cap \bar{A}} \subseteq \overline{G \cap A}$

άρα $\overline{G \cap \bar{A}} \subseteq \overline{G \cap A}$

Επίσης $G \cap A \subseteq G \cap \bar{A}$ άρα $\overline{G \cap A} \subseteq \overline{G \cap \bar{A}}$

$\Rightarrow \overline{G \cap \bar{A}} = \overline{G \cap A}$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Εφαρμόζοντας το (iii) για $A = X \setminus G$ προκύπτει:

$\overline{G \cap (\overline{X \setminus G})} = \overline{G \cap (X \setminus G)}$

$\overline{G \cap (X \setminus G^{\circ})} = \bar{\emptyset}$

$\overline{G \setminus G^{\circ}} = \emptyset$

$\Rightarrow G = G^{\circ}$ άρα G ανοικτό.

$G \setminus G^{\circ} = \emptyset$

$G \subseteq G^{\circ}$

---

5) (X, ρ) μ.χ. $x \in X$, $(x_n)_{n \in \omega}$ ακολουθία $x_n \to x$

Δ.ο. το $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι κλειστό

Απόδειξη: Θα δ.ο. το $X \setminus A$ είναι κλειστό.

Έστω $y \in X \setminus A$.

Τότε $y \notin A$ άρα $y \neq x \Rightarrow \underbrace{\rho(y, x)}_{\varepsilon} > 0$

Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$ $\forall n \geq n_0$

Θέτουμε $\delta = \min\{\varepsilon/2, \rho(y, x_1), \rho(y, x_2), \ldots, \rho(y, x_{n_0})\}$

$\delta > 0$

$B_\rho(y, \delta) \subseteq X \setminus A$ ισχύει $U \cap K \neq \emptyset$

Άρα $X \setminus A$ ανοικτό.

$p(x,y)=\varepsilon$ άρα $B_p(y,\frac{\varepsilon}{2}) \cap B_p(x,\frac{\varepsilon}{2})=\emptyset$

Αν $z \in B_p(y,\delta)$ τότε $z \neq x_n$ $\forall n \leq n_0$

Αν $n > n_0$, τότε $x_n \subseteq B_p(y,\frac{\varepsilon}{2})$

άρα $x_n \notin B_p(y,\varepsilon/2)$

και εφόσον $\delta \leq \varepsilon/2$, $x_n \notin B_p(y,\delta)$

άρα $z \neq x_n$

6) i) $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$

$x \in A' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $B_p(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$

ii) A κλειστό $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

$\Rightarrow$) Αν A κλειστό τότε $\bar{A}=A$ και εφόσον $\bar{A}=A \cup A'$ $\Big\} \Rightarrow A = A \cup A' \Rightarrow A' \subseteq A$

$\Leftarrow$) Αν $A' \subseteq A$. Τότε $\bar{A} = A \cup \bar{A} \subseteq A \cup \bar{A} = A$, άρα $\bar{A}=A$ άρα A κλειστό

iii) $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B$

Απόδειξη: Αν $x \in A'$ τότε $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$

Εφόσον $A \subseteq B$ έχουμε $A \setminus \{x\} \subseteq B \setminus \{x\}$, άρα $\overline{A \setminus \{x\}} \subseteq \overline{B \setminus \{x\}}$

Άρα $x \in \overline{B \setminus \{x\}}$ άρα $x \in B'$.

iv) Για ν.δ.ο. το A' είναι κλειστό. Θα δ.ο. το $X \setminus A'$ είναι ανοικτό.

Έστω $x \in X \setminus A' \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ $B_p(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$

δηλ. $B_p(x,\varepsilon) \cap A \subseteq \{x\}$

Θα δ.ο. $B_p(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus A'$

Έστω $y \in B_p(x,\varepsilon)$

→ Αν $y=x$ τότε $y \in X \setminus A'$ από την επιλογή του x

→ Αν $y \neq x$ και θέσουμε $\delta = \min\{\rho(x,y), \varepsilon - \rho(x,y)\}$
τότε $B_\rho(y,\delta) \cap (A \setminus \{y\}) = \emptyset$
άρα $y \notin A'$ δηλ. $y \in X \setminus A'$

(vi) Να δ.ο. $A'' \subseteq A'$

Από το (v) το A' είναι κλειστό, άρα από το (iv) $(A')' \subseteq A'$

Παρ: Για $A = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\}$

$A' = \{0\}$
$A'' = \emptyset$
, άρα A'' περιέχεται γνήσια στο A'.

(v) Αν $\mathrm{int}(\{x\}) = \emptyset$, τότε $x \notin \mathrm{int}\{x\}$ άρα για κάθε $\varepsilon > 0$
$B_\rho(x,\varepsilon) \not\subseteq x$ άρα $B_\rho(x,\varepsilon) \cap X \setminus \{x\} \neq \emptyset$ άρα $x \in X'$

8) (X,ρ) μ.χ., A, B μη κενά, κλειστά $A \cap B = \emptyset$.
Ορίζουμε $f: X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{\rho(x,A)}{\rho(x,A) + \rho(x,B)}$

i) f είναι καλά ορισμένη
Πράγματι, αν $x \in X$ με $\rho(x,A) + \rho(x,B) = 0$
$\Rightarrow \rho(x,A) = 0$ και $\rho(x,B) = 0$
$\Rightarrow x \in \bar{A}$ και $x \in \bar{B}$
$\xRightarrow{A,B \text{ κλειστά}}$ $x \in A$ και $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$ άτοπο, διότι $A \cap B = \emptyset$.

$0 \leq \rho(x,A) \leq \rho(x,A) + \rho(x,B)$, $\forall x \in X$
$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in X$

Αν $x \in A$, τότε $\rho(x,A) = 0$, άρα $f(x) = 0$.
Αν $x \in B$, τότε $\rho(x,B) = 0$, άρα $f(x) = 1$.

Ξέρουμε ότι οι συναρτήσεις

$$X \to \mathbb{R} \qquad\qquad X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \rho(x, A) \qquad x \mapsto \rho(x, B)$$ είναι συνεχείς

Άρα f συνεχής ως πηλίκο συνεχών.

β) Να δ.ο. $\exists\, U, V$ ανοικτά ξένα $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.

<u>Απάντηση</u>: Θέτουμε $U = f^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \right)$

$$V = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \right)$$

Τότε U, V ανοικτά (αντίστροφες εικόνες ανοικτών μέσω συνεχούς συνάρτησης)

$A \subseteq U$
$B \subseteq V$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

3ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μετρικοί χώροι και $f,g: X \to Y$ δύο συνεχείς συναρτήσεις.
α) Δείξτε ότι το σύνολο $F = \{x \in X : \ f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Να δώσετε δύο διαφορετικές αποδείξεις. Η πρώτη απόδειξη να γίνει με χρήση ακολουθιών. Η δεύτερη απόδειξη να γίνει αποδεικνύοντας ότι το συμπλήρωμα του F είναι ανοικτό σύνολο.
β) Αν D είναι ένα πυκνό υποσύνολο του X ώστε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D$, δείξτε ότι $f = g$.

2) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δυο βασικές ακολουθίες στο X. Να δείξετε ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\rho(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

3) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) ώστε το σύνολο $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ των όρων της να μην είναι κλειστό. Να δείξετε ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

4) Δώστε παράδειγμα μιας φθίνουσας ακολουθίας $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

5) Δώστε παράδειγμα μιας φθίνουσας ακολουθίας $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{Q}$ με $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

6) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $G \subseteq X$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.
(i) Το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X.
(ii) Υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο V του $\mathbb{R}$ και $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $G = f^{-1}(V)$.

7) Έστω (X,ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος.
α) Αν $f: X \to X$ είναι μια συνάρτηση συστολής, και $g: X \to X$ μια συνάρτηση ώστε να ισχύει $f \circ g = g \circ f$ να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $f(x) = x = g(x)$.
β) Αν $f: X \to X$ είναι μια συνάρτηση και $k \in \mathbb{N}$ ώστε η f^k (όπου $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$) να είναι συνάρτηση συστολής, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $f(x) = x$.

8) Ορίζουμε $d: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $d\Big((a,\beta),(\gamma,\delta)\Big) = \begin{cases} |\delta-\beta|, & \text{αν } a=\gamma \\ |\beta|+|\gamma-a|+|\delta|, & \text{αν } a\neq\gamma. \end{cases}$

α) Δείξτε ότι η d είναι μετρική στο $\mathbb{R}^2$.
β) Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία (κάνοντας σχήμα) της μετρικής d.
γ) Αν $x,y \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η ακολουθία $(x, y+\frac{1}{n})$ είναι πάντα συγκλίνουσα ακολουθία στον $(\mathbb{R}^2,d)$.
δ) Αν $x,y \in \mathbb{R}$ να εξετάσετε πότε η ακολουθία $(x+\frac{1}{n}, y)$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον $(\mathbb{R}^2,d)$ [Υπόδειξη: Να διαχωρίσετε τις περιπτώσεις $y=0$ και $y\neq 0$.]
ε) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g: (\mathbb{R}^2,d) \to (\mathbb{R}^2,d)$ με $g(x,y) = (y,x)$ δεν είναι συνεχής [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αρχή της μεταφοράς και τα προηγούμενα δύο ερωτήματα]
στ) Αν $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο $\mathbb{R}^2$ και $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, δείξτε ότι $(x_n,y_n) \xrightarrow{d} (x,y)$ αν και μόνο αν (....) Συμπληρώστε και αποδείξτε την παραπάνω πρόταση. (Χρειάζεται πάλι διαχωρισμός των περιπτώσεων $y=0$ και $y\neq 0$. Θα σας δοθεί στην τάξη αργότερα η ακριβής συμπλήρωση).
ζ) Δείξτε ότι οι προβολές $P,Q: (\mathbb{R}^2,d) \to \mathbb{R}$ με $P(x,y) = x$ και $Q(x,y) = y$ είναι συνεχείς (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον χαρακτηρισμό που θα έχει δειχθεί στο προηγούμενο ερώτημα και την αρχή της μεταφοράς).
η) Αν ρ είναι η ευκλείδεια μετρική στο $\mathbb{R}^2$ να εξετάσετε αν η ταυτοτική συνάρτηση $I: (\mathbb{R}^2,d) \to (\mathbb{R}^2,\rho)$ είναι συνεχής και αν η ταυτοτική συνάρτηση $J: (\mathbb{R}^2,\rho) \to (\mathbb{R}^2,d)$ είναι συνεχής.